

Hypotese og deduktion til testbar matematisk model. Delaflevering 2

To timer på skolen, resten hjemme. Aflevering: se Lectio

Fysikdel, Newtons afkølingslov

Vi ser på afkøling, et "varmt" legeme i "kolde" omgivelser. Vi kan starte med at antage følgende simple sammenhæng (hypotese):

Hastigheden hvormed legemets temperatur ændrer sig, er proportional med den øjeblikkelige temperaturforskel mellem legeme og omgivelser. (så: jo større temperaturforskel, ...?)

a

Indfør passende symboler, skitser afkølingsforløbet grafisk (med blyant og papir/tavle fotografér/skan og indsæt), idet du også tilføjer dine symboler til figuren, og opstil differentiallyigningen. NB: proportionalitetskonstanten ønskes positiv.

b

Bestem, ved løsning af differentiallyigningen, en formelmæssig sammenhæng mellem de indførte variable og konstanter. Se evt. bilag 1. Husk at inddrage initialbetingelsen: til at starte med er legemets temperaturen T_0 (hvis du kalder begyndelsestemperaturen det).

Spoiler alert!

Lærernes forslag til figur i spørgsmål a samt resultat til spørgsmål b, se bilag 2

Kemidel, Reaktionskinetik

Her begrænset til førsteordensreaktioner ...med et twist.

Vi ser på en kemisk reaktion: to stoffer (reaktanter) blandes sammen, og der opstår med tiden kemisk ligevægt. Vi vil se på produktets koncentration, som vokser fra 0 til at starte med op mod en maksimal værdi. Antag, til at starte med, følgende simpel sammenhæng (hypotese):

Hastigheden hvormed koncentrationen af produktet ændrer sig, er proportional med hvor meget den mangler i at være maksimal. (så: jo mere den mangler i at være maksimal, ...)

a

Indfør passende symboler, skitser den forventede udvikling i koncentrationen grafisk idet du også tilføjer dine symboler, og opstil differentiallyigningen. NB: proportionalitetskonstanten ønskes positiv.

b

Bestem, ved løsning af differentiallyigningen en formelmæssig sammenhæng mellem de indførte variable og konstanter. Se evt. bilag 1. Husk at inddrage initialbetingelsen: til at starte med er koncentrationen 0 (med relevant enhed).

Spoiler alert!

Lærernes forslag til figur i spørgsmål a samt resultat til spørgsmål b i bilag 3.

Bilag 1. Løsning af udvalgte differentialligninger

Sætning 1

Den fuldstændige løsning til

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y, \quad k \neq 0, \text{ er}$$

$$y = c \cdot e^{k \cdot x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Sætning 2

Den fuldstændige løsning til differentialligningen (kaldes den logistiske ligning)

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y), \quad \text{hvor } a \text{ og } M \text{ er positive, reelle tal}$$

$$y = \frac{M}{1 + k \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}, \quad k \in \mathbb{R}_+$$

(som kaldes den logistiske vækstfunktion)

Sætning 3

Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = b + a \cdot y,$$

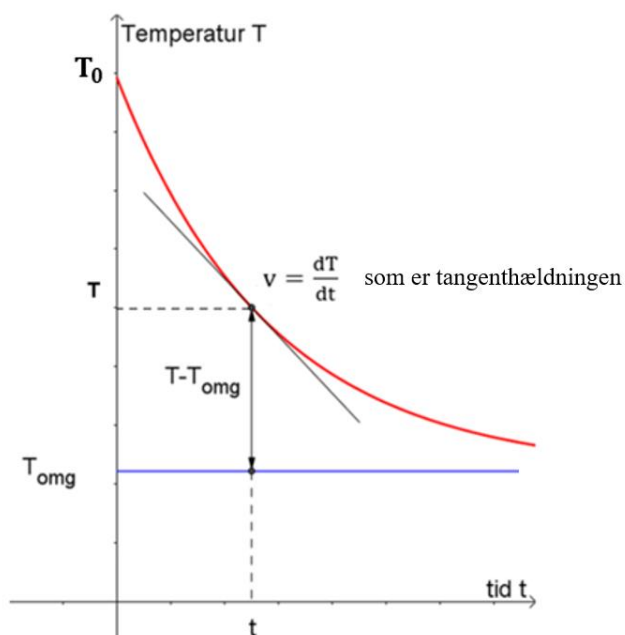
som også kan skrives $\frac{dy}{dx} = a \cdot \left(\frac{b}{a} + y\right)$, ses umiddelbart, (sådan starter den ofte med at se ud),

hvor a og b er reelle tal, og hvor $a \neq 0$, er givet ved

$$y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{a \cdot x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Bilag 2: Spoiler, fysikdel

Figur til spørgsmål a: Du skulle gerne komme frem til noget i retning af



Det forventes at jeres figur er lavet "i hånden".

Resultat til spørgsmål b:

$$T(t) = T_{omg} + (T_0 - T_{omg}) \cdot e^{-k \cdot t}, \text{ hvor}$$

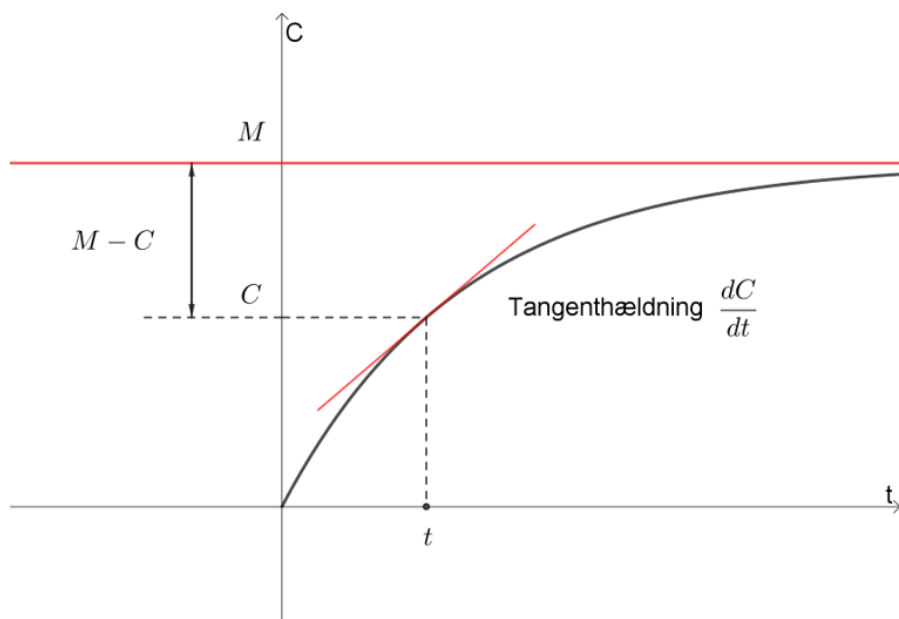
$T(t)$ er ...,

T_{omg} er ...,

...

Bilag 3: Spoiler, kemidel

Figur til spørgsmål a: Du skulle gerne komme frem til noget i retning af



Det forventes at jeres figur er lavet "i hånden".

Symbolet C er brugt for "koncentrationen af stoffet A ". Dette skrives som bekendt $[A]$ i kemi, men det er lidt klodset at arbejde med.

Resultat til spørgsmål b:

$$C(t) = M - M \cdot e^{-k \cdot t}, \text{ hvor}$$

$C(t)$ er ...,

M er ...,

...