Træningsmateriale til SO-forløbet "Modeller"

caj

Indhold

Om træningsmaterialet

Henvisninger til afsnit og sidetal i dette træningsmateriale refererer til kompendiet Differentialligninger v14 af caj, ligger i mappen Kompendier..

Når der i dette materiale står "Læs …": Det, der skal læses, vil blive gennemgået, men hvis man er foran, kan man selv "studere" og arbejde videre, hvilket er meget sundt. Man kan også bruge de passager i forbindelse med sygdom, så man selv kan "læse op".

Materialet udleveres i pdf-format. Dette for at være sikker på at modtageren ser det samme som afsenderen. Sådan vil det også være med materiale fra Netprøver.dk og jeres senere studier.
I kan selvfølgelig bare kopiere de enkelte opgaveformuleringer osv. ind i det dokument, I arbejder på. Og giv det dokument et navn I kan huske! Opret evt. en mappe der hedder SO Modeller.

Der bliver arbejdet med følgende dele af kernestoffet for differentialligninger:

- Hvad er en differentialligning og hvad forstår man ved en løsning til en sådan.
- Løsningskurve (men ikke linjeelementer)
- Undersøgelse af om en givet funktion er løsning til en differentialligning ved indsættelse.
- Væksthastighed
- Proportionalitet.
- Opstilling af differentialligninger fra en sproglig beskrivelse
- Løsning ved typegenkendelse.
- Løsning vha. integralregning for de simpleste typer af differentialligninger.
- Løsning af differentialligninger i Maple.

Ved de enkelte dele og opgaver i nærværende materiale, vil der stå hvor du kan læse om de forskellige ting.

Del 1, undersøge om en funktion er løsning til en differentialligning

Start med at læse følgende i kompendiet Differentialligninger v14.

- Hvad er en differentialligning og hvordan ser løsningen ud: afsnit 1.0 side 2
- Undersøgelse af om en givet funktion er løsning til en differentialligning: **afsnit 2.3 side 7. Er også detaljeret beskrevet med eksempel i Oversigt Differentialregning … side 5.**

Opgave 1.1

hhx, maj 2016, uden hjælpemidler

Gør rede for at funktionen f med forskriften $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 20x + 15$ er en løsning til differentialligningen

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = 20x - x^2$$

Opgave 1.2

hhx, december 2016, uden hjælpemidler

Gør rede for, at funktionen f med forskriften

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + 10$$

er en løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} - 2x^3 = 6x$.

Opgave 1.3

Undersøg, om $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 2 = y - x^3$$

Opgave 1.3.a

For elever i studieretning med matematik A

stx, maj 2012, med formelsamling

Undersøg om funktionen $f(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x+1}$$

Opgave 1.3.b

For elever i studieretning med matematik A

stx, maj 2013, med formelsamling

Vis, at $f(x) = x \cdot \ln x + 2x$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}$$

I de næste opgaver, skal man kunne differentiere e^x og $e^{k \cdot x}$. Se i "Oversigt Differentialregning… " hvorledes man gør det. Er du i en matematik A-studieretning, ved du hvorfor.

Opgave 1.4

stx, august 2008, med formelsamling
Undersøg, om enhver funktion af typen $g(x) = x + 1 + c \cdot \mathrm{e}^x$, hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -x + y$$

Opgave 1.5

Undersøg, om $g(x) = c \cdot e^{4x} - 2$, hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen
$\frac{dy}{dx} = 4y + 8$

Opgave 1.6

Undersøg, om $g(x) = c \cdot e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}$, hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen
$\frac{dy}{dx} + 1 = 2y + 4x$

Del 2, løsning af differentialligninger ved typegenkendelse

Denne del handler om at løse differentialligninger vha. typegenkendelse. Vi tager udgangspunkt i, hvad I har lært om integralregning, og går derefter videre til andre typer, som ikke direkte kan løses vha. integralregning. NB: Arbejdet med type 1 (til og med opgave 2.3), kan kun laves, hvis man har lært at bestemme en stamfunktion vha. integralregning.

Type 1. Sætning.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = g(x),\ \ x \in I$, hvor g er kontinuert i et interval I, er

$$y = \int g(x)\,dx, \qquad x \in I$$

hvor G er en stamfunktion til g og k er en vilkårlig konstant.

Bemærk, at højresiden (når y' står alene på venstresiden) er "en funktion af *x*".
Differentialligningerne vi arbejdede med i del 1, var både *x* og *y*-afhængige (udtrykt ved *x* og *y*).
(I kan læse mere i kompendiet side 11, men ingen grund til at kigge i det lige nu).

Eksempel til type 1
Vi skal bestemme den løsning $f(x)$ til differentialligningen $y' - 4x = 12$, hvor løsningskurven indeholder punktet $(1{,}3)$.

Løsning:

$y' - 4x = 12 \Leftrightarrow$

$y' = 4x + 12$, som ses at være af typen 1, så

$f(x) = \int (4x + 12)\,dx = 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 12x + k = 2x^2 + 12x + k$

k kan bestemmes af betingelsen $f(1) = 3$:

$f(1) = 3 \Leftrightarrow$

$2 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + k = 3 \Leftrightarrow k = -11$, så

$f(x) = 2x^2 + 12x - 11$, **som er den løsning, der opfylder alle betingelser.**

Opgave 2.1

Om funktionen f vides følgende: Den er løsning til differentialligningen $y' + 8x = x^2$, og dens graf går igennem punktet $(4, -2)$. Bestem den funktion f, der opfylder begge krav.

Opgave 2.2

Bestem den løsning $f(x)$ til differentialligningen $\frac{dy}{dx} + 4 \cdot x = \frac{1}{x}$, der opfylder initialbetingelsen $f(1) = 4$. (Initialbetingelse betyder begyndelsesbetingelse. Det svarer til et punkt på løsningskurven/på grafen for $f(x)$).

Opgave 2.3

Givet differentialligningen $\frac{dh}{dt} = 6 \cdot t^2 - 4t + 3$.
Bestem den løsning til differentialligningen, der opfylder initialbetingelsen $h(0) = 8$

Nu ser vi på nogle bestemte typer (elementære, men typiske) af differentialligninger, hvor højresiden (når y' står alene på venstresiden) er udtrykt ved y i stedet for ved x, og hvor samtlige løsninger kan angives en gang for alle. Det er typerne

Type 4. Sætning:

Den fuldstændige løsning (det betyder samtlige løsninger) til

$y' = k \cdot y \,, \; k \neq 0$, er

$y = c \cdot e^{k \cdot x} \,, \; c \in \mathbb{R}$

(Bevist i afsnit 3.4 i kompendium).

Type 6. Sætning:

Den fuldstændige løsning til den *logistiske ligning*

$y' = a \cdot y \cdot (M - y) \,, \; a, M \in \mathbb{R}_+$

er den *logistiske vækstfunktion*:

$$y = \frac{M}{1 + k \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} \,, \; k \in \mathbb{R}_+$$

(Bevist i afsnit 3.7.1 i kompendiet).

Type 7. Sætning:

Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$y' = b + a \cdot y \,, \; a \neq 0$, er givet ved

$y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{a \cdot x} \,, \; c \in \mathbb{R}$

(Bevist i afsnit 3.8 i kompendium)

De næste mange opgaver bygger på typerne 4, 6 og 7.
Identificer først typen i den enkelte opgave. Derefter kan samtlige løsninger angives vha. sætningerne ovenfor.

Ovenfor er der henvisninger til afsnit i kompendiet, hvor sætningerne bevises. Men beviserne er ikke så vigtige lige nu, og kan forvirre mere end de gavner. Du skal nok selv få lov til delvist at bevise dem snart.

Opgave 2.4 er meget vigtig på nuværende tidspunkt, fordi det der er på spil i den, skal bruges i de næste sværere opgaver.
Der er henvisninger til relevante eksempler i kompendiet. Så arbejd dig stille og roligt igennem opgave 2.4, brug eksemplerne, der henvises til ved behov. Fokuser på læring! De næste opgaver bygger på, at du har helt styr på opgave 2.4.

Opgave 2.4

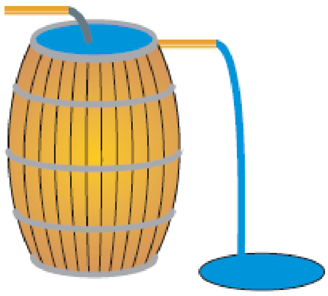
For lige at få det "gennem hånden" inden I skal lave "sjovere" opgaver …

a) Bestemt til differentialligningen $y' = 10 - 0{,}1y$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(20{,}90)$ og tegn grafen for f. Se evt. eksempel i afsnit 6.11 side 31 i kompendiet.
b) Bestemt til differentialligningen $y' = 0{,}02 \cdot y \cdot (100 - y)$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(0{,}20)$ og tegn grafen for f. Se evt. eksempel i 6.10 side 30 i kompendiet.
c) Bestemt til differentialligningen $y' + 0{,}1y = 0$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(10{,}20)$ og tegn grafen for f. Se evt. eksempel i 6.7 side 28 i kompendiet.

Opgave 2.5

stx mat A december 2011

Fra et rør løber forurenet vand ned i en tønde med vand. Med $C(t)$ betegnes koncentrationen (målt i ppm.) af det forurenende stof i tønden til tidspunktet t (målt i minutter).



I en model antages det, at $C(t)$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$$

Det oplyses at $C(0) = 0$.

a) Bestem en forskrift for $C(t)$.

Hint til afkodning. Symbolet $\frac{dC}{dt}$ røber, hvad der er fri og afhængig variabel. Med x og y kan differentialligningen skrives $\frac{dy}{dx} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot y$. Højresiden er dermed y-afhængig, og differentialligningen ses at være af typen 7, se ovenfor.

Forslag til skrivemåde ved løsning af spørgsmål a:

Differentialligningen ses at være af typen $y' = b + ay$, $a \neq 0$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = -\frac{b}{a} + k \cdot e^{a \cdot x}$. I den aktuelle situation fås
$C(t) = \ldots$

(jeg har anvendt k i stedet for c ovenfor, fordi der er et C i opgaven)

b) Skitsér grafen for $C(t)$, og bestem det tidspunkt, hvor koncentrationen af det forurenende stof i tønden er 10 ppm.

Inden spørgsmål c løses, læser du afsnit 2.5 side 8 i kompendiet. Hvis det ikke er nok til fortolkningen, er der et mere direkte hint øverst på næste side

c) Bestem $C'(15)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Hint til opgave 2.5 c

Ved at beregne $C'(15)$ har du fundet ud af, hvad $\frac{dC}{dt}$ er for $t = 15$. Og $\frac{dC}{dt}$ kan jo ifølge afsnit 2.5 i kompendiet fortolkes som "den hastighed hvormed koncentrationen ændrer sig" og enheden på det beregnede tal ses at være $\frac{\text{ppm}}{\text{min}}$, hvor "min" står for "minut".

Opgave 2.6

For at arbejde lidt mere med hastighedsbegrebet.
"Momentanhastighed" kan være lidt forvirrende, men er ganske elementært: hvis du kører med 20 kilometer i timen på din cykel, betyder det jo kun, at det gør du lige nu, og om lidt har du en anden fart/hastighed. Det betyder *ikke*, at du bliver ved med det en hel time…

Den hastighed (væksthastighed, momentanvæksthastighed) hvormed antallet N af frøer i et vådområde ændrer sig, er i en model givet ved

$$v = \frac{dN}{dt} = -0{,}01 \cdot N$$

Tiden t måles i måneder. Til tiden $t = 0$ anslås, at der er ca. 25000 frøer.

a) Beregn v svarende til $t = 0$, og fortolk resultatet. Bestem derefter v, når antallet af frøer er kommet ned på 10.000, og fortolk. NB: Du skal ikke løse differentialligningen for at svare.

b) Angiv en model, der beskriver antallet af frøer i vådområdet som funktion af tiden (dvs. løs differentialligningen), og afbild modellen grafisk.

c) Angiv modellen på formen $f(x) = b \cdot a^x$, og angiv hvad man kan sige om udviklingen i antal frøer fra denne.

Opgave 2.7

stx mat A maj 2011

SARS-epidemiens udvikling i Singapore i 2003 kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$$

hvor N er antal smittede til tidspunktet t (målt i døgn). Det oplyses, at der efter 30 døgn var 103 smittede.

a) Bestem væksthastigheden til det tidspunkt, hvor antal smittede var 100.

b) Bestem $N(t)$, og gør rede for, hvad tallet 209 i modellen fortæller om epidemiens udvikling.
Hint: man kan se på grænseværdier i løsningen eller man kan se på differentialligningen. Antallet kan ikke "krydse over" et sted, hvor væksthastigheden er 0). Det kan også hjælpe at tegne grafen.

Opgave 2.8

stx mat A maj 2012

Pintado (Foto: Lerdsuwa)

En fisk af arten Pintado fodres med en bestemt slags krebsdyr, hvorved det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv forøges.

I en model kan udviklingen i det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = 5{,}1742 - 0{,}1584M \ ,$$

hvor $M(t)$ betegner det relative kulstof-13-indhold (målt i promille) til tiden t (målt i døgn efter påbegyndt fodring).
Det oplyses, at det relative kulstof-13-indhold var 20 promille, da fodringen blev påbegyndt.

a) Bestem en forskrift for M.

b) Tegn grafen for M, og bestem den øvre grænse for det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv.

Opgave 2.9

htx, maj 2002

Temperaturen T som funktion af tiden t af et legeme der opvarmes i en ovn med konstant temperatur A, opfylder med god nøjagtighed differentialligningen

$$\frac{dT}{dt} = k\,(A - T),$$

hvor k er en konstant, der afhænger af legemets form og materiale. I denne opgave regnes T i grader Celsius (°C) og t i minutter.

En oksesteg, der har temperaturen 20°C, sættes til tiden $t = 0$ i en ovn med temperaturen $A = 250$°C. For stegen er $k = 0{,}005$.

a) Bestem stegens temperatur $T(t)$ for $t \geq 0$.

b) Hvor mange minutter skal stegen have, hvis den er færdig, når temperaturen er 65°C?

Opgave 2.10

htx, juni 2017

Billedet viser et apparat til måling af blodsukker.

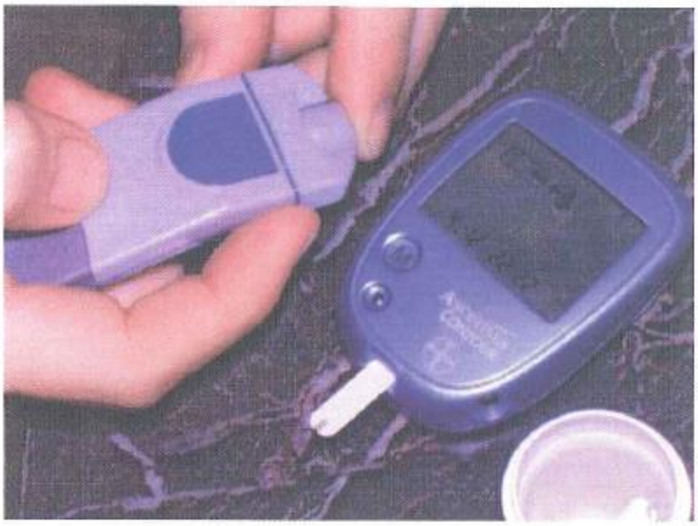


Foto: Rune Friis Lauridsen

Koncentrationen af glukose i blodet ligger normalt under 1000 mg pr. liter. Ved tilførsel af insulin kan koncentrationen af glukose i blodet sænkes. Diabetikere kan i dag få tilført insulin med et transportabelt doseringsapparat.
Koncentrationen af glukose i blodet kan ved konstant tilførsel af insulin tilnærmelsesvis beskrives ved følgende differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = 540 - 0{,}6 \cdot y$$

hvor y angiver koncentrationen i mg pr. liter og t måles i timer.

Til tiden $t = 0$, viser en måling af diabetikerens koncentration af glukose i blodet 1500 mg pr. liter.

a) Bestem den løsning $y = f(t)$, der opfylder betingelserne ovenfor.

b) Bestem den tid det tager, indtil koncentrationen er nede på 1000 mg pr. liter.

c) Bestem grænseværdien for f for t gående mod uendelig.

Opgave 2.11

Reaktionshastigheden ved sønderdeling af dinitrogenpentoxid ved 45°C, er i en model givet ved

$$v = \frac{d[A]}{dt} = -k \cdot [A] \,,$$

hvor k er hastighedskonstanten, der i denne sammenhæng er $k = 6{,}20 \cdot 10^{-4}$ min^{-1}, og $[A]$ er den øjeblikkelige molære koncentration af dinitrogenpentoxid, og t er tiden.

Begyndelseskoncentrationen (koncentrationen af dinitrogenpentoxid til tiden 0) kaldes $[A]_0$.

a) opstil en model der beskriver den øjeblikkelige molære koncentration af dinitrogenpentoxid som funktion af tiden, udtrykt ved $[A]_0$

b) Beregn halveringstiden, og beregn hvor længe det varer, inden 90 % af stoffet er sønderdelt.

Opgave 2.12

stx mat A december 1995

I en model for bakteriesygdommes udbredelse, går man ud fra, at den funktion I(t), der angiver antallet af smittede til tiden t (målt i uger) er løsning til en differentialligning af formen

$$\frac{dI}{dt} = I(rN - k - rI) \quad ,$$

hvor N, r og k er konstanter. N er befolkningens størrelse, og r og k afhænger af sygdommens smitsomhed og infektionens varighed.

I en bestemt situation er $N = 5 \cdot 10^6$, $r = 2 \cdot 10^{-6}$ *og* $k = 8$.

Det oplyses endvidere, at antallet af smittede til tidspunktet $t = 0$ er 10^4.

a) Bestem en forskrift for *I*.

b) Bestem den øvre grænse for antallet af smittede.

c) Bestem det tidspunkt, hvor 10 % af befolkningen er blevet smittet.

Opgave 2.13

Læs afsnit 2.8 side 10-11 i kompendiet om løsning af differentialligninger i Maple.
Brug derefter Maple til at klare spørgsmål a i opgave 2.5 og spørgsmål a i opgave 2.10.

Del 3. Opstilling og løsning af differentialligninger

Læs afsnit 2.5, 2.6 og 2.7 side 8-10 i kompendiet. Afsnit 2.6 skulle du gerne nikke genkendende til.

Opgave 3.1

Skriv følgende på symbolsk form, først med $\propto$, derefter på formen ... $= k \cdot$ ...

a) y er proportional med s og omvendt proportional med q^2.

b) m er proportional med såvel s som kvadratet på h og omvendt proportional med $\sqrt{z}$.
Tillægsspørgsmål til de hurtige: hvad sker der med m, når s fordobles, alt andet lige? hvad sker der med m, når h fordobles, alt andet lige? hvad sker der med m, når z gøres 4 gange så stor, alt andet lige?

Opgave 3.2. Græskaropgaven

Vi betragter 5 modeller for væksten (hvor der fokuseres på massen/vægten) af en bestemt græskarsort. Et græskar af denne type vejer i gennemsnit 52 kg, når de er udvoksede.
Vægten/massen i kg betegnes m og tiden (i døgn) betegnes med t .

Model 1
Væksthastigheden antages proportional med den øjeblikkelige masse.

Model 2
Væksthastigheden antages proportional med tiden.

Model 3
Væksthastigheden antages proportional med såvel tiden, der er gået fra start samt den øjeblikkelige masse

Model 4
Væksthastigheden antages proportional med hvor meget græskarret mangler i at være udvokset.

Model 5
Vækstagtigheden antages proportional med kvadratroden af t og omvendt proportional med $m + 2$

Opstil en differentialligning for hver model (altså 5 forskellige).

Opgave 3.3

Formuler differentialligningerne i opgave 2.5 til 2.11 (2.12 er sværere og valgfri) a la:
"Hastigheden hvormed … er proportional med … og proportionalitetskonstanten er …."

Hint, du kan have glæde af til flere af opgaverne: Differentialligningen $\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$ fra opgave 2.5, kan omskrives til $\frac{dC}{dt} = 0{,}02 \cdot (20 - C)$. Og så er det let at se proportionalitetsforholdene.

I 2.12 kan man også omskrive differentialligningen så den kommer til at ligne den i 2.7 …

Opgave 3.4: Bambusopgaven.

Denne opgave vil dukke op som aflevering inden december. Opgaven er knyttet til SO5, men afleveres ikke sammen med SO5, men tidligere.

Vi betragter 5 modeller for væksten af en bestemt bambusart.
Bambusplanterne af denne art bliver i gennemsnit 300 cm høje, når de er udvoksede.

Model 1
Væksthastigheden antages proportional med den øjeblikkelige højde.

Model 2
Væksthastigheden antages konstant.

Model 3
Væksthastigheden antages proportional med tiden.

Model 4
Væksthastigheden antages proportional med hvor meget planten mangler i at være udvokset.

Model 5
Væksthastigheden antages proportional med såvel den øjeblikkelige højde samt med hvor meget den mangler i at være udvokset.

NB: spørgsmål a og b kan slås sammen, hvis du synes at det er bedre. Man kan også lave spørgsmål a, b og c for den ene, så for den anden osv. Du bestemmer selv rækkefølgen, bare du har alle elementer med.

a) Opstil en differentialligning for hver model. Proportionalitetskonstanten kaldes i spørgsmål a bare for *k*.

Til resten af opgaven:
For alle modeller **undtagen** model 3:
Til tiden 0 er højden af planten 20 cm, og væksthastigheden til dette tidspunkt er 30 $\frac{\text{cm}}{\text{døgn}}$.
For model 3:
Til tiden 0 er højden af planten 20 cm. Væksthastigheden til tiden 4 døgn er 30 $\frac{\text{cm}}{\text{døgn}}$.

b) Bestem proportionalitetskonstanterne for de 5 differentialligninger fra spørgsmål a, og angiv derefter de 5 differentialligninger med proportionalitetskonstanter.

c) Opstil i hver situation en model til at beregne plantens højde (i centimeter) til tiden t (i døgn), og afbild modellen grafisk (altså: løs differentialligningerne, og løsningerne skal opfylde alle betingelser). Differentialligningerne løses ved typegenkendelse. Elever, der ikke har lært om stamfunktioner, kan fx anvende Maple til løsning af differentialligningerne 2 og 3.

3.5. Beviser – den ene vej …

Denne opgave er en del af "SO5 Modeller".
Er du foran kan du lave den mens de andre rykker nærmere 😊
Vis, ved indsættelse (som i del 1 af dette materiale) at de påståede løsninger til typerne 4, 6 og 7 (se side 6 i dette dokument) er løsninger. For type 6 kan du bruge cas til differentiation og reduktion, hvis du har lidt svært ved matematik).