Træningsmateriale, Løsning

caj

Indhold

Opgave 1.1

hhx, maj 2016, uden hjælpemidler

Gør rede for at funktionen f med forskriften $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 20x + 15$ er en løsning til differentialligningen

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = 20x - x^2$$

Løsning

Hvis $f(x)$ er løsning, skal $x \cdot f'(x) = 20x - x^2$ være opfyldt:

$x \cdot f'(x) = 20x - x^2 \Leftrightarrow$

$x \cdot (-x + 20) = 20x - x^2 \Leftrightarrow$

$-x^2 + 20x = 20x - x^2$

$f(x)$ er dermed løsning til differentialligningen. Der er hermed redegjort for det ønskede.

Opgave 1.2

hhx, december 2016, uden hjælpemidler

Gør rede for, at funktionen f med forskriften

$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + 10$

er en løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} - 2x^3 = 6x$.

Løsning

Hvis $f(x)$ er løsning, skal $f'(x) - 2x^3 = 6x$ være opfyldt:

$f'(x) - 2x^3 = 6x \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x^1 + 0 - 2x^3 = 6x \Leftrightarrow$

$2x^3 + 6x - 2x^3 = 6x \Leftrightarrow$

$6x = 6x$

$f(x)$ er dermed løsning til differentialligningen. Der er hermed redegjort for det ønskede.

Opgave 1.3

Undersøg, om $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ er løsning til differentialligningen
$\frac{dy}{dx} - 2 = y - x^3$

Løsning
Hvis $f(x)$ er løsning, skal $f'(x) - 2 = f(x) - x^3$ være opfyldt:

$$f'(x) - 2 = f(x) - x^3 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{3x^2 - 8x}_{f'(x)} - 2 = \underbrace{x^3 - 4x^2 + 2}_{f(x)} - x^3 \Leftrightarrow$$

$3x^2 - 8x - 2 = -4x^2 + 2$, som ikke er sandt for alle x.

$f(x)$ er dermed IKKE løsning til differentialligningen

Opgave 1.3.a

For elever i studieretning med matematik A
stx, maj 2012, med formelsamling

Undersøg om funktionen $f(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x+1}$$

Løsning
Hvis $f(x)$ er løsning, skal

$$f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x+1}$$

være opfyldt:

$$f'(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x + \frac{(x+1) \cdot \mathrm{e}^x}{1 \cdot (x+1)} \Leftrightarrow$$

$$e^x + (x+1) \cdot \mathrm{e}^x = (x+1) \cdot \mathrm{e}^x + e^x$$

$f(x)$ er dermed løsning til differentialligningen.

Opgave 1.3.b

For elever i studieretning med matematik A

stx, maj 2013, med formelsamling

Vis, at $f(x) = x \cdot \ln x + 2x$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x}$$

Løsning

Hvis $f(x)$ er løsning, skal

$$f'(x) = \frac{f(x)+x}{x}$$

være opfyldt:

$$f'(x) = \frac{f(x)+x}{x} \Leftrightarrow$$

$$1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 2 = \frac{x \cdot \ln x + 2x + x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln x + 1 + 2 = \ln x + 2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln x + 3 = \ln x + 3$$

$f(x)$ er dermed løsning til differentialligningen. Der ønskede er hermed vist.

I de næste opgaver, skal man kunne differentiere e^x og $e^{k \cdot x}$. Se i "Oversigt Differentialregning… " hvorledes man gør det. Er du i en matematik A-studieretning, ved du hvorfor.

Opgave 1.4

stx, august 2008, med formelsamling
Undersøg, om enhver funktion af typen $g(x) = x + 1 + c \cdot \mathrm{e}^x$, hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = -x + y$$

Løsning
Hvis $g(x)$ er løsning, skal $g'(x) = -x + g(x)$ være opfyldt:

$$g'(x) = -x + g(x) \Leftrightarrow$$

$$1 + 0 + c \cdot e^x = -x + x + 1 + c \cdot e^x \Leftrightarrow$$

$$1 + c \cdot e^x = 1 + c \cdot e^x$$

$g(x)$ er dermed løsning til differentialligningen.

Opgave 1.5

Undersøg, om $g(x) = c \cdot e^{4x} - 2$, hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 4y + 8$

Løsning
Hvis $g(x)$ er løsning, skal $g'(x) = 4 \cdot g(x) + 8$ være opfyldt:

$$g'(x) = 4 \cdot g(x) + 8 \ \Leftrightarrow$$

$$c \cdot 4 \cdot e^{4x} = 4 \cdot (c \cdot e^{4x} - 2) + 8 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot c \cdot e^{4x} = 4 \cdot c \cdot e^{4x} - 8 + 8 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot c \cdot e^{4x} = 4 \cdot c \cdot e^{4x}$$

$g(x)$ er dermed løsning til differentialligningen.

Opgave 1.6

Undersøg, om $g(x) = c \cdot e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}$, hvor c er et tal, er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} + 1 = 2y + 4x$

Løsning
Hvis $g(x)$ er løsning, skal $g'(x) + 1 = 2 \cdot g(x) + 4x$ være opfyldt:

$$g'(x) + 1 = 2 \cdot g(x) + 4x \quad \Leftrightarrow$$

$$c \cdot 2 \cdot e^{2x} - 2 - 0 + 1 = 2 \cdot \left(c \cdot e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}\right) + 4x \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot c \cdot e^{2x} - 1 = 2 \cdot c \cdot e^{2x} - 4x - 1 + 4x \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot c \cdot e^{2x} - 1 = 2 \cdot c \cdot e^{2x} - 1$$

$g(x)$ er dermed løsning til differentialligningen.

Del 2, løsning af differentialligninger ved typegenkendelse

Type 1. Sætning.

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = g(x),\ \ x \in I$, hvor g er kontinuert i et interval I, er

$$y = \int g(x)\, dx, \qquad x \in I$$

hvor *G* er en stamfunktion til *g* og *k* er en vilkårlig konstant.

Opgave 2.1

Om funktionen f vides følgende: Den er løsning til differentialligningen $y' + 8x = x^2$, og dens graf går igennem punktet $(4, -2)$. Bestem den funktion f, der opfylder begge krav.

Løsning

$y' + 8x = x^2 \Leftrightarrow$

$y' = x^2 - 8x$, som ses at være af typen $y' = g(x)$, hvor samtlige løsninger er givet ved

$y = \int g(x)\, dx$.

Vi får $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 + k = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + k$

k kan bestemmes af betingelsen $f(4) = -2$:

$f(4) = -2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 4 \cdot 4^2 + k = -2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{64}{3} - 64 + k = -2 \Leftrightarrow$

$k = 62 - \frac{64}{3} = \frac{186}{3} - \frac{64}{3} = \frac{122}{3}$, så

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + \frac{122}{3}$**, som er den løsning, der opfylder alle betingelser.**

Opgave 2.2

Bestem den løsning $f(x)$ til differentialligningen $\frac{dy}{dx} + 4 \cdot x = \frac{1}{x}$, der opfylder initialbetingelsen $f(1) = 4$. (Initialbetingelse betyder begyndelsesbetingelse. Det svarer til et punkt på løsningskurven/på grafen for $f(x)$).

Løsning:
$$\frac{dy}{dx} + 4 \cdot x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$y' = \frac{1}{x} - 4x$, som ses at være af typen $y' = g(x)$, hvor samtlige løsninger er givet ved

$$y = \int g(x)\, dx.$$

Vi får $y = f(x) = \ln|x| - 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 + k = \ln|x| - 2x^2 + k$

k kan bestemmes af betingelsen $f(1) = 4$:

$f(1) = 4 \Leftrightarrow$

$\ln 1 - 2 \cdot 1^2 + k = 4 \Leftrightarrow k = 6$, så

$f(x) = \ln|x| - 2x^2 + 6$, **som er den løsning, der opfylder alle betingelser.**

Opgave 2.3

Givet differentialligningen $\frac{dh}{dt} = 6 \cdot t^2 - 4t + 3$.
Bestem den løsning til differentialligningen, der opfylder initialbetingelsen $h(0) = 8$

Løsning
$\frac{dh}{dt} = h'(t) = 6 \cdot t^2 - 4t + 3$, så

$h(t) = \int (6 \cdot t^2 - 4t + 3)\, dt = 6 \cdot \frac{1}{3} t^3 - 4 \cdot \frac{1}{2} t^2 + 3t + k = 2t^3 - 2t^2 + 3t + k$, og

$h(0) = 8 \Leftrightarrow 0 - 0 + 0 + k = 8 \Leftrightarrow k = 8$, så

$h(t) = 2t^3 - 2t^2 + 3t + 8$, **som er den løsning, der opfylder alle betingelser.**

Type 4. Sætning:

Den fuldstændige løsning (det betyder samtlige løsninger) til

$y' = k \cdot y\ ,\ \ k \neq 0$, er

$y = c \cdot e^{k \cdot x}\ ,\ \ c \in \mathbb{R}$

Type 6. Sætning:

Den fuldstændige løsning til den *logistiske ligning*

$y' = a \cdot y \cdot (M - y)\ ,\ \ a, M \in \mathbb{R}_+$

er den *logistiske vækstfunktion*:

$y = \dfrac{M}{1 + k \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}\ \ ,\ \ k \in \mathbb{R}_+$

Type 7. Sætning:

Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$y' = b - a \cdot y = a \cdot \left(\frac{b}{a} - y\right) = a \cdot (M - y)\ ,\ \ a \neq 0$, og hvor $M = \frac{b}{a}$ er givet ved

$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x} = M + c \cdot e^{-a \cdot x}\ \ ,\ \ c \in \mathbb{R}$

Opgave 2.4

a) Bestemt til differentialligningen $y' = 10 - 0{,}1y$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(20{,}90)$ og tegn grafen for f. Se evt. eksempel i afsnit 6.11 side 31 i kompendiet.

b) Bestemt til differentialligningen $y' = 0{,}02 \cdot y \cdot (100 - y)$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(0{,}20)$ og tegn grafen for f. Se evt. eksempel i 6.10 side 30 i kompendiet.

c) Bestemt til differentialligningen $y' + 0{,}1y = 0$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(10{,}20)$ og tegn grafen for f. Se evt. eksempel i 6.7 side 28 i kompendiet.

2.4.a

Bestemt til differentialligningen $y' = 10 - 0{,}1y$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(20{,}90)$ og tegn grafen for f.

Løsning

Differentialligningen ses at være af formen $y' = b - a \cdot y$, $a \neq 0$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$, $c \in \mathbb{R}$.

I den aktuelle situation fås:

$$y = \frac{10}{0{,}1} + c \cdot e^{-0{,}1 \cdot x} \Leftrightarrow$$

$$y = 100 + c \cdot e^{-0{,}1 \cdot x} \qquad (1)$$

Punktet P indsættes:

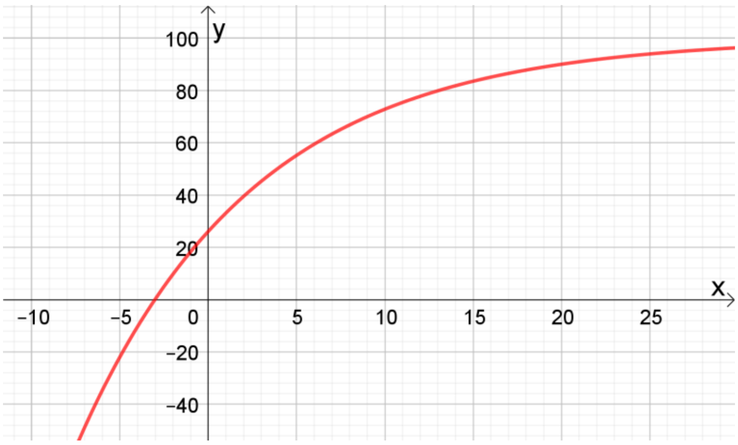
$90 = 100 + c \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20} \Leftrightarrow c = -10 \cdot e^{2} \cong -73{,}891$

Denne indsættes i (1):

$y = f(x) = 100 - 73{,}891 \cdot e^{-0{,}1x}$, hvis der er tale om anvendt matematik, og

$y = f(x) = 100 - 10 \cdot e^{2} \cdot e^{-0{,}1x}$, hvis der er tale om ren matematik. I disse småopgaver er den første bedst, fordi formen fremstår tydeligere.

Figuren viser et uddrag af grafen for f



Konklusion med tre betydende cifre på afrundede tal

Løsningen til differentialligningen er $f(x) = 100 - 73{,}9e^{-0{,}1x}$. Et uddrag af dens graf ses ovenfor.

Beregningsdokumentation (hvis ligningen ovenfor løses vha. cas):

$solve(90 = 100 + c \cdot e^{-2})$

$-10\ e^{2}$

$-10\ e^{2} \xrightarrow{\text{at 10 digits}} -73.89056099$

2.4.b
Bestemt til differentialligningen $y' = 0{,}02 \cdot y \cdot (100 - y)$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(0{,}20)$ og tegn grafen for f.

Løsning
Differentialligningen ses at være af formen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$, $a, M \in \mathbb{R}_+$, hvor samtlige løsninger er givet ved

$$y = \frac{M}{1 + k \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}} \quad , \quad k \in \mathbb{R}_+$$

I den aktuelle situation fås:

$$y = \frac{100}{1 + k \cdot e^{-0{,}02 \cdot 100 \cdot x}} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{100}{1 + k \cdot e^{-2 \cdot x}} \qquad (1)$$

Punktet (initialbetingelsen) indsættes:

$$20 = \frac{100}{1 + k \cdot e^{-2 \cdot 0}} \Leftrightarrow$$

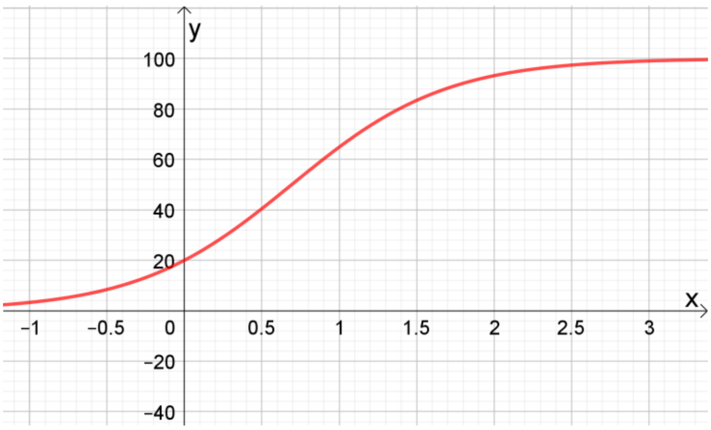
$$20 = \frac{100}{1 + k} \Leftrightarrow$$

$$1 + k = 5 \Leftrightarrow$$

$k = 4$, som indsættes i (1):

$$y = f(x) = \frac{100}{1 + 4 \cdot e^{-2 \cdot x}}$$

Figuren viser et uddrag af grafen for f



Konklusion
Løsningen til differentialligningen er

$$y = f(x) = \frac{100}{1 + 4 \cdot e^{-2 \cdot x}}$$

Et uddrag af dens graf ses ovenfor.

Beregningsdokumentation (hvis ligningen ovenfor løses vha. cas i stedet for "i hånden"):

$$solve\left(20 = \frac{100}{1 + k \cdot e^{-2 \cdot 0}}\right)$$

4

2.4.c

Bestemt til differentialligningen $y' + 0{,}1y = 0$ den løsning $f(x)$ hvis graf går igennem $P(10{,}20)$ og tegn grafen for f.

Løsning

Differentialligningen omskrives:
$y' + 0{,}1y = 0 \Leftrightarrow y' = -0{,}1 \cdot y$, som ses at være af formen $y' = k \cdot y$, $k \neq 0$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = c \cdot e^{k \cdot x}$, $c \in \mathbb{R}$.

I den aktuelle situation fås:
$y = c \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$ (1)

Punktet indsættes:
$20 = c \cdot e^{-0{,}1 \cdot 10} \Leftrightarrow 20 = c \cdot e^{-1} \Leftrightarrow 20 = c \cdot \frac{1}{e} \Leftrightarrow c = 20 \cdot e \cong 54{,}37 \Rightarrow$

Denne indsættes i (1):

$y = f(x) = 54{,}37 \cdot e^{-0{,}1x}$

(igen vælges den afrundede værdi af konstanten for at løsningens form skal træde tydeligere frem).

Figuren viser et uddrag af grafen for *f*:

Konklusion med tre betydende cifre på afrundede tal
Løsningen til differentialligningen er $f(x) = 54{,}5 \cdot e^{-0{,}1x}$. Et uddrag af dens graf ses ovenfor.

Beregningsdokumentation (hvis ligningen ovenfor løses vha. cas):

$20 \cdot e \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 54.365636560000000$

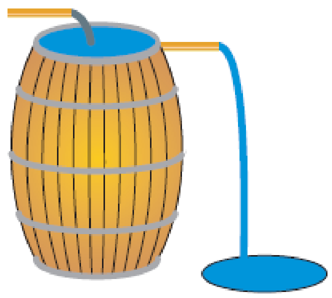
$solve\left(20 = c \cdot e^{-0.1 \cdot 10}\right) = 54.365636569180905$

$solve\left(20 = c \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot 10}\right) = \frac{20}{e^{-1}} \overset{\text{simplify}}{=} 20\,e$

Opgave 2.5

stx mat A december 2011

Fra et rør løber forurenet vand ned i en tønde med vand. Med *C*(*t*) betegnes koncentrationen (målt i ppm.) af det forurenende stof i tønden til tidspunktet *t* (målt i minutter).



I en model antages det, at *C*(*t*) er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$$

Det oplyses at $C(0) = 0$.

a) Bestem en forskrift for *C*(*t*).

Hint til afkodning. Symbolet $\frac{dC}{dt}$ røber, hvad der er fri og afhængig variabel. Med *x* og *y* kan differentialligningen skrives $\frac{dy}{dx} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot y$. Højresiden er dermed *y*-afhængig, og differentialligningen ses at være af typen 7, se ovenfor.

Forslag til skrivemåde ved løsning af spørgsmål a:

Differentialligningen ses at være af typen $y' = b - a \cdot y$, $a \neq 0$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = \frac{b}{a} + k \cdot e^{-a \cdot x}$. I den aktuelle situation fås
$C(t) = \ldots$

Løsning, spørgsmål a

Differentialligningen $\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$ ses at have formen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$.

I den aktuelle situation fås

$$C = \frac{0{,}4}{0{,}02} + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \Leftrightarrow$$

$C(t) = 20 + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$

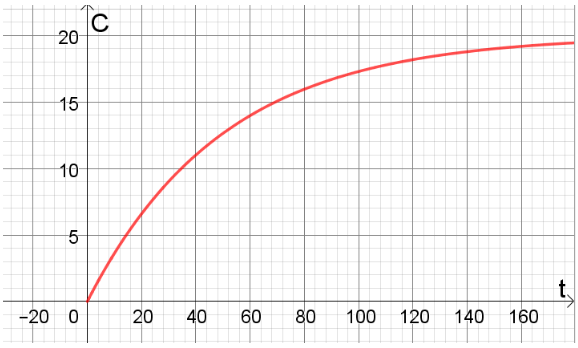
Oplysningen $C(0) = 0$ indsættes:

$0 = 20 + c \cdot e^{-0{,}02 \cdot 0} \Leftrightarrow$
$0 = 20 + c \Leftrightarrow$
$c = -20$

Konklusion, to betydende cifre
Modellen / funktionen er givet ved $C(t) = 20 - 20 \cdot e^{-0{,}020 \cdot t}$, $t \geq 0$.

b) Skitsér grafen for $C(t)$, og bestem det tidspunkt, hvor koncentrationen af det forurenende stof i tønden er 10 ppm.

Løsning, spørgsmål b
Figuren viser grafen for modellen



Tidspunktet, hvor koncentrationen er 10 ppm:
$C(t) = 10 \Rightarrow$
$t \cong 34{,}66$

Konklusion med to betydende cifre
Til tiden 35 minutter er koncentrationen 10 ppm. Grafen for funktionen ses ovenfor.

Beregningsdokumentation

$C(t) := 20 - 20 \cdot e^{-0.02 \cdot t}$:
$solve(C(t) = 10)$

34.65735903

c) Bestem $C'(15)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Løsning, spørgsmål c

$C'(15) \cong 0{,}30$, og idet $C'(t) = \frac{dC}{dt}$, ses, at $C'(t)$ er "hastigheden hvormed koncentrationen ændres".

Konklusion
$C'(15) \cong 0{,}30$ hvilket betyder, at til tiden 15 minutter er hastigheden, koncentrationen vokser med, 0,30 ppm/min.

Beregninger

$C(t) := 20 - 20 \cdot e^{-0.02 \cdot t}$:
$C'(15) = 0.296327288272687$

Opgave 2.6

For at arbejde lidt mere med hastighedsbegrebet.
"Momentanhastighed" kan være lidt forvirrende, men er ganske elementært: hvis du kører med 20 kilometer i timen på din cykel, betyder det jo kun, at det gør du lige nu, og om lidt har du en anden fart/hastighed. Det betyder *ikke*, at du bliver ved med det en hel time…

Den hastighed (væksthastighed, momentanvæksthastighed) hvormed antallet N af frøer i et vådområde ændrer sig, er i en model givet ved

$$v = \frac{dN}{dt} = -0{,}01 \cdot N$$

Tiden t måles i måneder. Til tiden $t = 0$ anslås, at der er ca. 25000 frøer.

a) Beregn v svarende til $t = 0$, og fortolk resultatet. Bestem derefter v, når antallet af frøer er kommet ned på 10.000, og fortolk. NB: Du skal ikke løse differentialligningen for at svare.

b) Angiv en model, der beskriver antallet af frøer i vådområdet som funktion af tiden (dvs. løs differentialligningen), og afbild modellen grafisk.

c) Angiv modellen på formen $f(x) = b \cdot a^x$, og angiv hvad man kan sige om udviklingen i antal frøer fra denne.

Løsning, spørgsmål a
Til $t = 0$ er der 25000 frøer, så
$$v = \frac{dN}{dt} = -0{,}01 \cdot 25000 = -250$$

Til et andet tidspunkt er antallet af frøer 10000, så
$$v = \frac{dN}{dt} = -0{,}01 \cdot 10000 = -100$$

Fortolkning
I den første situation er hastigheden, hvormed antallet af frøer ændrer sig, –250. Det betyder at antallet af frøer falder med 250 pr måned (til tidspunktet t = 0).
I den anden situation (til det andet tidspunkt) falder antallet af frøer med 100 pr måned.

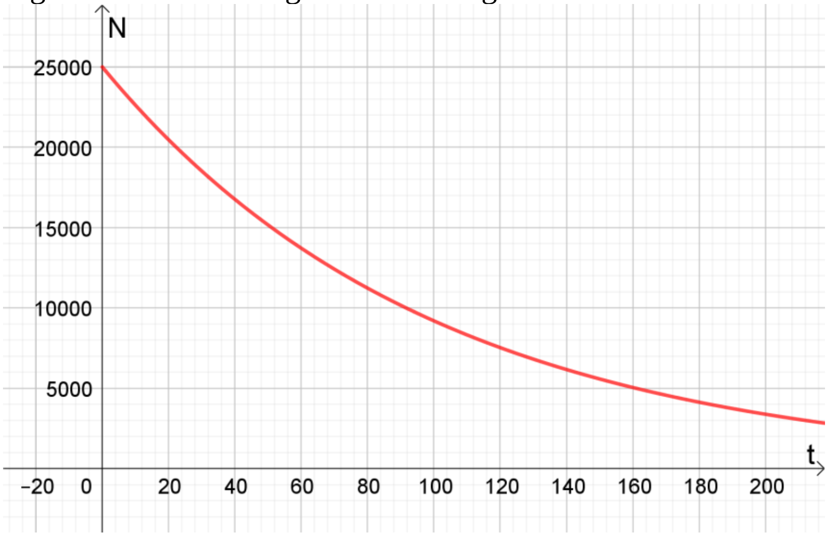
Løsning, spørgsmål b
Differentialligningen $v = \frac{dN}{dt} = -0{,}01 \cdot N$ ses at have formen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = c \cdot e^{k \cdot x}$.

I den aktuelle situation fås
$N = c \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$
Initialbetingelsen $t = 0 \Longrightarrow N = 25000$ indsættes:

$25000 = c \cdot e^{-0{,}01 \cdot 0} \Leftrightarrow$
$25000 = c \cdot 1 = c$, så

Modellen er givet ved
$N = N(t) = 25000 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$.

Figuren viser et uddrag af modellens graf.



Konklusion
Modellen er givet ved $N(t) = 25000 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$. Grafen ses ovenfor.

Løsning, spørgsmål c
$N(t) = 25000 \cdot e^{-0,01 \cdot t} = 25000 \cdot (e^{-0,01})^t \cong 25000 \cdot 0,9900^t$

Af denne sidste ses, at antallet af frøer falder med 1 % pr måned.

Beregninger

$e^{-0.01}$

0.9900498337

Opgave 2.7

stx mat A maj 2011

SARS-epidemiens udvikling i Singapore i 2003 kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$$

hvor N er antal smittede til tidspunktet t (målt i døgn). Det oplyses, at der efter 30 døgn var 103 smittede.

a) Bestem væksthastigheden til det tidspunkt, hvor antal smittede var 100.

b) Bestem $N(t)$, og gør rede for, hvad tallet 209 i modellen fortæller om epidemiens udvikling.
Hint: man kan se på grænseværdier i løsningen eller man kan se på differentialligningen. Antallet kan ikke "krydse over" et sted, hvor væksthastigheden er 0). Det kan også hjælpe at tegne grafen.

Løsning, spørgsmål a

For $N = 100$ var væksthastigheden $\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot 100 \cdot (209 - 100) \cong 57{,}33$, så:
Hastigheden var ca. 57,33 pr døgn, dvs. at der kom ca. 57 nye smittede til pr. døgn.

Løsning, spørgsmål b

Differentialligningen $\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$ ses at have formen
$y' = a \cdot y \cdot (M - y)\,,\ \ a, M \in \mathbb{R}_+$, hvor samtlige løsninger er givet ved

$$y = \frac{M}{1 + k \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}\ \ ,\ \ k \in \mathbb{R}_+$$

I den aktuelle situation fås

$$N = \frac{209}{1 + k \cdot e^{-0{,}00526 \cdot 209 \cdot t}}\ \ ,\ \ k \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow$$

$$N = \frac{209}{1 + k \cdot e^{-1{,}0993 \cdot t}}\ \ ,\ \ k \in \mathbb{R}_+$$

Oplysningen $t = 30 \Longrightarrow N = 103$ anvendes:

$$103 = \frac{209}{1 + k \cdot e^{-1{,}0993 \cdot 30}} \Longrightarrow$$

$$k \cong 2{,}1656 \cdot 10^{14}$$

Modellen er dermed givet ved

$$N(t) = \frac{209}{1 + 2{,}16 \cdot 10^{14} \cdot e^{-1{,}10 \cdot t}}$$

med tre betydende cifre på afrundede tal.

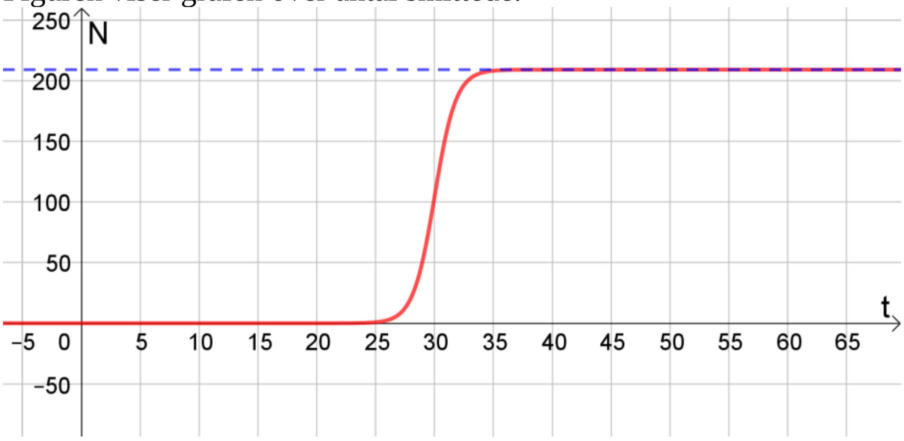
De 209 er "loft over" hvor mange der blev/kunne blive smittet:

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \frac{209}{1 + 2{,}16 \cdot 10^{14} \cdot 0} = \frac{209}{1} = 209$$

(Grænseværdien kan beregnes i Maple, hvis man ikke kan overskue det selv, se nedenfor).

Note: Man kan også af differentialligningen $\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$ se, at væksthastigheden er 0 for $N = 0$ og for $N = 209$. Og når væksthastigheden er 0, kan "væksten" ikke "krydse over". N kan ikke komme over 209, fordi væksthastigheden er 0, når $N = 209$)

Figuren viser grafen over antal smittede.



Konklusion med tre betydende cifre på afrundede tal:

Modellen er givet ved

$$N(t) = \frac{209}{1 + 2{,}16 \cdot 10^{14} \cdot e^{-1{,}10 \cdot t}}$$

De "209" er "loft over" hvor mange der blev/kunne blive smittet.

Beregningsdokumentation

$$N(t) := \frac{209}{1 + k \cdot \mathrm{e}^{-0.00526 \cdot 209 \cdot t}} :$$

$$N(t)$$

$$\frac{209}{1 + k\,\mathrm{e}^{-1.099340000000000\,t}}$$

$$k := solve(N(30) = 103) = 2.165646224462677\,10^{14}$$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = 209.000000000000000$$

Opgave 2.8

stx mat A maj 2012

En fisk af arten Pintado fodres med en bestemt slags krebsdyr, hvorved det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv forøges.


Pintado (Foto: Lerdsuwa)

I en model kan udviklingen i det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} = 5{,}1742 - 0{,}1584M \ ,$$

hvor $M(t)$ betegner det relative kulstof-13-indhold (målt i promille) til tiden t (målt i døgn efter påbegyndt fodring).
Det oplyses, at det relative kulstof-13-indhold var 20 promille, da fodringen blev påbegyndt.

a) Bestem en forskrift for M.

b) Tegn grafen for M, og bestem den øvre grænse for det relative kulstof-13-indhold i Pintadoens muskelvæv.

Løsning, spørgsmål a
Differentialligningen $\frac{dM}{dt} = 5{,}1742 - 0{,}1584 \cdot M$ ses at have formen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$.

I den aktuelle situation fås

$$M = \frac{5{,}1742}{0{,}1584} + c \cdot e^{-0{,}1584 \cdot t} \implies$$

$$M(t) = 32{,}665 + c \cdot e^{-0{,}1584 \cdot t}$$

Oplysningen $t = 0 \implies M = 20$ anvnendes for at bestemme c:

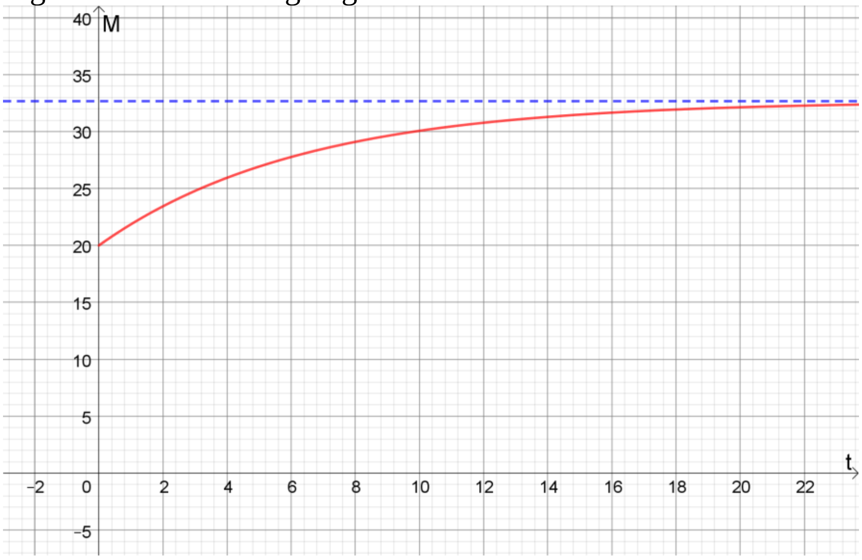
$$20 = 32{,}665 + c \cdot e^{-0{,}1584 \cdot 0} \iff$$

$$20 = 32{,}665 + c \iff$$

$$c = -12{,}665$$

Modellen/funktionen er dermed, med 4 betydende cifre, givet ved
$M(t) = 32{,}67 - 12{,}67 \cdot e^{-0{,}1584 \cdot t} \ , \ \ t \geq 0$

Løsning, spørgsmål b
Figuren viser et uddrag af grafen for M



Den øvre grænse af det relative kulstof-13 indhold, kan bestemmes som grænseværdi for $t \to \infty$:
$\lim_{t \to \infty} M(t) \cong 32{,}7$

Konklusion med 3 betydende cifre på afrundede tal.
Den øvre grænse af det relative kulstof-13 indhold er 32,7 promille. Modellens graf samt den øvre grænse for det relative kulstof-13 indhold (stiplet) ses på figuren ovenfor.

Beregningsdokumentation

$M(t) := 32.665 - 12.665 \cdot e^{-0.1589 \cdot t}$:

$\lim_{t \to \infty} M(t) = 32.665000000000000$

Opgave 2.9

htx, maj 2002

Temperaturen T som funktion af tiden t af et legeme der opvarmes i en ovn med konstant temperatur A, opfylder med god nøjagtighed differentialligningen

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

hvor k er en konstant, der afhænger af legemets form og materiale. I denne opgave regnes T i grader Celsius (°C) og t i minutter.

En oksesteg, der har temperaturen 20°C, sættes til tiden $t = 0$ i en ovn med temperaturen $A = 250$°C. For stegen er $k = 0{,}005$.

a) Bestem stegens temperatur $T(t)$ for $t \geq 0$.

b) Hvor mange minutter skal stegen have, hvis den er færdig, når temperaturen er 65°C?

Løsning, spørgsmål a

Differentialligningen $\frac{dT}{dt} = k \cdot (A - T)$ ses at have formen $\frac{dy}{dx} = a \cdot (M - y)$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = M + c \cdot e^{-a \cdot x}$.

I den aktuelle situation fås

$T = A + c \cdot e^{-k \cdot t} \Leftrightarrow$

$T(t) = A + c \cdot e^{-k \cdot t}$

$A = 250$ og $k = 0{,}005$ indsættes:

$T(t) = 250 + c \cdot e^{-0{,}005 \cdot t}$ (1)

Vi gør brug af initialbetingelsen $T(0) = 20$:

$T(0) = 20 \Leftrightarrow$

$20 = 250 + c \cdot e^{-0,005 \cdot 0} \Leftrightarrow$

$20 = 250 + c$

$c = -230$, som indsættes i (1):

$T(t) = 250 - 230 \cdot e^{-0,005 \cdot t}, \quad t \geq 0$

Konklusion
Stegens temperatur som funktion af tiden er givet ved
$T(t) = 250 - 230 \cdot e^{-0,005 \cdot t}, \quad t \geq 0$

Løsning, spørgsmål b
Stegen er færdig når $T(t) = 65$:

$T(t) = 65 \Leftrightarrow$
$250 - 230 \cdot e^{-0,005 \cdot t} = 65 \Rightarrow$
$t \cong 43,5$

Konklusion
Stegen er færdig efter ca. 43,5 minut

Beregningsdokumentation

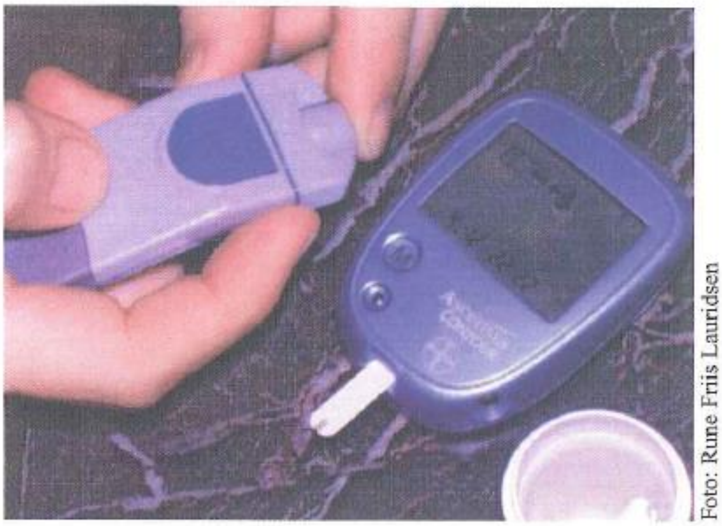
$solve\left(250 - 230 \cdot e^{-0.005\, t} = 65\right)$

43.54469677

Opgave 2.10

htx, juni 2017

Billedet viser et apparat til måling af blodsukker.



Koncentrationen af glukose i blodet ligger normalt under 1000 mg pr. liter. Ved tilførsel af insulin kan koncentrationen af glukose i blodet sænkes. Diabetikere kan i dag få tilført insulin med et transportabelt doseringsapparat.
Koncentrationen af glukose i blodet kan ved konstant tilførsel af insulin tilnærmelsesvis beskrives ved følgende differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = 540 - 0{,}6 \cdot y$$

hvor y angiver koncentrationen i mg pr. liter og t måles i timer.

Til tiden $t = 0$, viser en måling af diabetikerens koncentration af glukose i blodet 1500 mg pr. liter.

a) Bestem den løsning $y = f(t)$, der opfylder betingelserne ovenfor.

b) Bestem den tid det tager, indtil koncentrationen er nede på 1000 mg pr. liter.

c) Bestem grænseværdien for f for t gående mod uendelig.

Løsning, spørgsmål a

Differentialligningen $\frac{dy}{dt} = 540 - 0{,}6 \cdot y$ ses at have formen $\frac{dy}{dx} = b - a \cdot y$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$.

I den aktuelle situation fås

$$y = \frac{540}{0{,}6} + c \cdot e^{-0{,}6 \cdot t} \Leftrightarrow$$

$$y = f(t) = 900 + c \cdot e^{-0{,}6 \cdot t} \qquad (1)$$

Initialbetingelsen $f(0) = 1500$ anvendes:

$f(0) = 1500 \Leftrightarrow$

$900 + c \cdot e^{-0,6 \cdot t} = 1500 \Leftrightarrow$

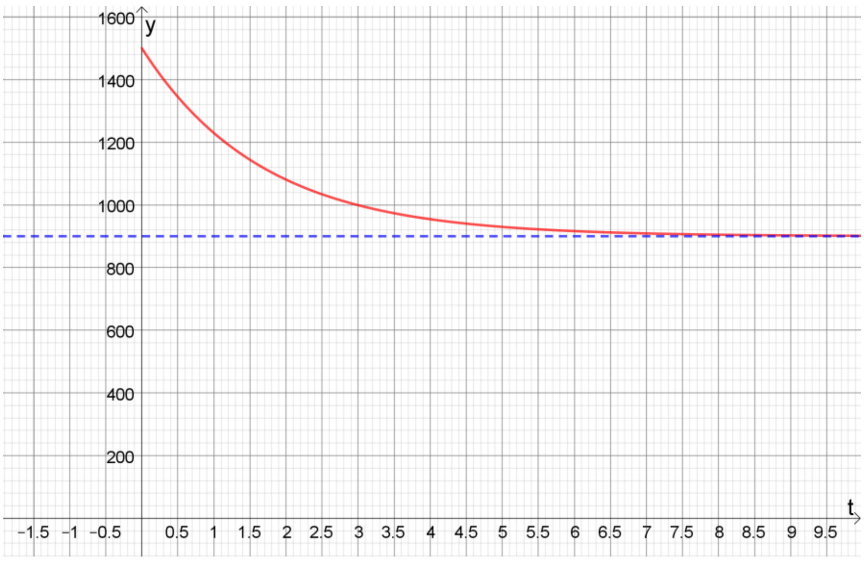
$c \cdot e^{0} = 600 \Leftrightarrow$

$c = 600$, som indsættes i (1):

$y = f(t) = 900 + 600 \cdot e^{-0,6 \cdot t}, \;\; t \geq 0$

Konklusion
Løsningen, som opfylder alle betingelser, er givet ved
$y = f(t) = 900 + 600 \cdot e^{-0,6 \cdot t}, \;\; t \geq 0$

Løsning, spørgsmål b
Selv om der ikke er bedt om det, er det en god idé at tegne grafen for modellen



Tiden det tager inden koncentrationen er 1000 mg pr liter:

$f(t) = 1000 \Leftrightarrow$

$900 + 600 \cdot e^{-0,6 \cdot t} = 1000 \Rightarrow$

$t \cong 2,99$

Konklusion
Efter ca. 3 døgn er koncentrationen nede på 1000 mg pr. liter.

$solve\left(900 + 600 \cdot e^{-0.6\,t} = 1000\right)$

2.986265782

Løsning, spørgsmål c

$\lim_{t\to\infty} f(t) = 900$

Det betyder, at koncentrationen vil nærme sig 900 mg pr. liter som tiden går.

Beregningsdokumentation

$f(t) := 900 + 600\cdot e^{-0.6\,t}$

$$f := t \to 900 + 600\,\mathit{RealDomain}\text{:-exp}((-1)\cdot 0.6\,t)$$

$\lim_{t\to\infty} f(t)$

$$900.$$

Opgave 2.11

Reaktionshastigheden ved sønderdeling af dinitrogenpentoxid ved 45°C, er i en model givet ved

$$v = \frac{d[A]}{dt} = -k \cdot [A] \,,$$

hvor k er hastighedskonstanten, der i denne sammenhæng er $k = 6{,}20 \cdot 10^{-4}$ min^{-1}, og $[A]$ er den øjeblikkelige molære koncentration af dinitrogenpentoxid, og *t* er tiden.

Begyndelseskoncentrationen (koncentrationen af dinitrogenpentoxid til tiden 0) kaldes $[A]_0$.

a) opstil en model der beskriver den øjeblikkelige molære koncentration af dinitrogenpentoxid som funktion af tiden, udtrykt ved $[A]_0$

b) Beregn halveringstiden, og beregn hvor længe det varer, inden 90 % af stoffet er sønderdelt.

Løsning, spørgsmål a

Differentialligningen $\frac{d[A]}{dt} = -k \cdot [A]$ ses at have formen $\frac{dy}{dx} = k \cdot y$, hvor samtlige løsninger er givet ved $y = c \cdot e^{k \cdot x}$.

I den aktuelle situation fås

$$[A] = c \cdot e^{-k \cdot t}$$

Initialbetingelsen indsættes:

$$[A]_0 = c \cdot e^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow$$

$c = [A]_0$ (fordi $e^0 = 1$)

Dermed har vi

$[A] = [A](t) = [A]_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, $t \geq 0$, som er svaret.

Spørgsmål b:

Halveringstid $T_{\frac{1}{2}} = -\frac{\ln 2}{-k} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{6{,}20 \cdot 10^{-4}} \cong 1118$, og:

Når 90 % af stoffet er sønderdelt, er det 10 % tilbage.

Vi løser derfor ligningen

$[A](t) = 0{,}1 \cdot [A]_0 \Leftrightarrow$

$[A]_0 \cdot e^{-k \cdot t} = 0{,}1 \cdot [A]_0 \Leftrightarrow$

$e^{-k \cdot t} = 0{,}1 \Leftrightarrow$ (det er helt ok at løse denne vha. cas)

$\ln(e^{-k \cdot t}) = \ln(0{,}1) \Leftrightarrow$

$-k \cdot t = \ln(0{,}1)$

$t = -\frac{\ln(0{,}1)}{k} = \frac{\ln(0{,}1)}{6{,}20 \cdot 10^{-4}} \cong 3714$

Konklusion
Halveringstiden er ca. 1118 minutter (18,6 timer), og tiden inden 90 % af stoffet er sønderdelt er ca. 3714 minutter (61,9 timer)

Beregninger

$$\frac{\ln(2)}{6.2 \cdot 10^{-4}} = 1612.903225806451613 \ln(2) \overset{\text{simplify}}{=} 1117.979323483782757$$

$$-\frac{\ln(0.1)}{6.2 \cdot 10^{-4}} = 3713.846924183944652$$

$$\frac{1117.979323483782757}{60} = 18.632988724729713$$

$$\frac{3713.846924183944652}{60} = 61.897448736399078$$

Opgave 2.12

stx mat A december 1995

I en model for bakteriesygdommes udbredelse, går man ud fra, at den funktion I(t), der angiver antallet af smittede til tiden t (målt i uger) er løsning til en differentialligning af formen

$$\frac{dI}{dt} = I(rN - k - rI)\ \ ,$$

hvor N, r og k er konstanter. N er befolkningens størrelse, og r og k afhænger af sygdommens smitsomhed og infektionens varighed.

I en bestemt situation er $N = 5 \cdot 10^6$, $r = 2 \cdot 10^{-6}$ *og* $k = 8$.

Det oplyses endvidere, at antallet af smittede til tidspunktet $t = 0$ er 10^4.

a) Bestem en forskrift for *I*.

b) Bestem den øvre grænse for antallet af smittede.

c) Bestem det tidspunkt, hvor 10 % af befolkningen er blevet smittet.

a, løsning

De oplyste tal indsættes (der kunne regnes med bogstaver længe endnu, men det bliver uoverskueligt. Vi indsætter derfor de oplyste tal):

$$\frac{dI}{dt} = I \cdot (2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 - 8 - 2 \cdot 10^{-6} \cdot I) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} = I \cdot (2 - 2 \cdot 10^{-6} \cdot I) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot I \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot 10^{-6}} - I\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot I \cdot (10^6 - I)$$

Differentialligningen ovenfor ses at have formen $y' = a \cdot y \cdot (M - y)$, $a, M \in \mathbb{R}_+$, hvor samtlige løsninger er givet ved

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}\ \ ,\ \ c \in \mathbb{R}_+$$

(jeg bruger c som navn til konstanten, da der er et k i opgaven)

I den aktuelle situation fås

$$I = I(t) = \frac{10^6}{1 + c \cdot e^{-2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \cdot t}} \Leftrightarrow$$

$$I(t) = \frac{10^6}{1 + c \cdot e^{-2 \cdot t}}$$

Initialbetingelsen indsættes:

$$10^4 = \frac{10^6}{1 + c \cdot e^{-2 \cdot 0}}$$ det er helt ok at løse denne vha. cas

$$10^4 = \frac{10^6}{1 + c} \Leftrightarrow$$

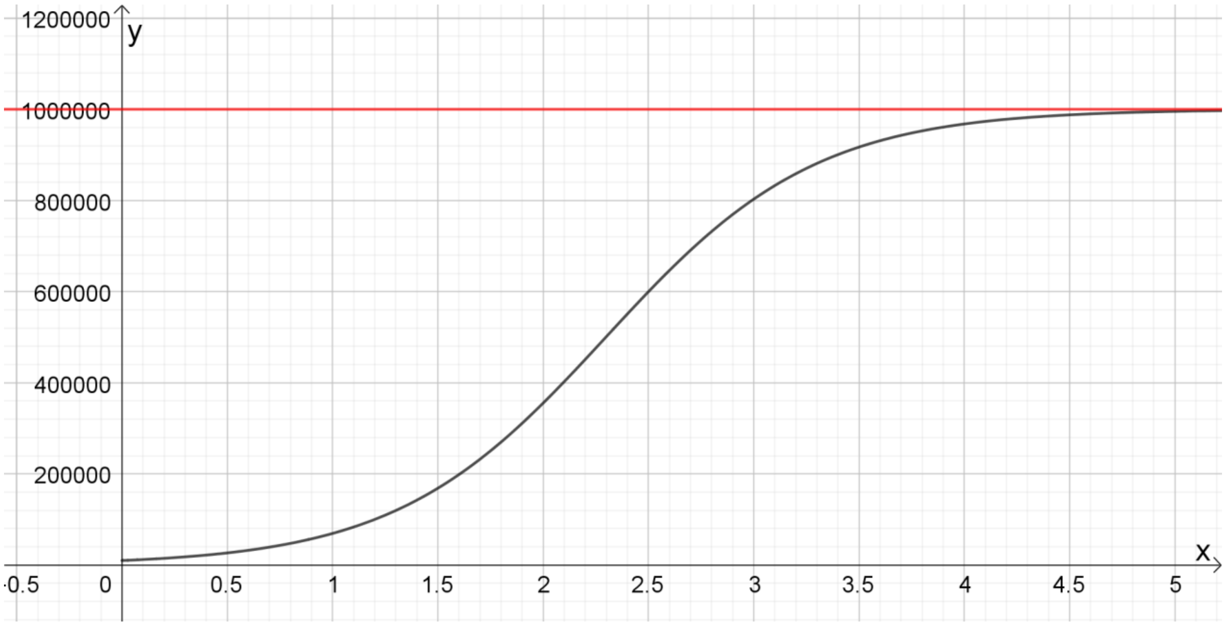
$$1 + c = \frac{10^6}{10^4} = 100 \Leftrightarrow$$

$c = 99$, så

$$I(t) = \frac{10^6}{1 + 99 \cdot e^{-2 \cdot t}}$$, **som er løsningen**

b, løsning
For $t \to \infty$ går nævneren mod $1 + 0 = 1$, så $\lim_{t \to \infty} I(t) = 10^6$
Konklusion: Den øvre grænse er 1 mio. smittede (af en population på 5 mio.)

Note/forklaring: matematisk skriver vi $t \to \infty$, men t skal ikke være ret stor, for at nævneren kommer tæt på 1. Det betyder, at stigningen mod loftet er ret brat, som figuren nedenfor også viser:



Efter 5 dage er næsten alle, der kan smittes, blevet smittet. Så meget for $t \to \infty$ 😊

c, løsning
10 % af befolkningen er 500.000 (som er halvdelen af det antal, der kan blive smittet ifølge modellen).
Vi løser derfor ligningen $I(t) = 500000$. Vi får $t \cong 2{,}3$.

Konklusion
ifølge modellen er 10 % af befolkningen smittet efter ca. 2,3 dage (ca. 2 døgn og 7 timer)

Beregningsdokumentation:

$$I_1(t) := \frac{10^6}{1 + 99 \cdot e^{-2 \cdot t}}:$$

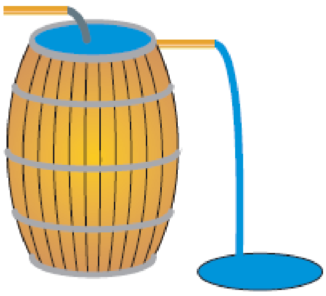
$$t_1 := solve\left(I_1(t) = 500000.\right) = 2.297559925067295$$

Opgave 2.13

Læs afsnit 2.8 side 10-11 i kompendiet om løsning af differentialligninger i Maple.
Brug derefter Maple til at klare spørgsmål a i opgave 2.5 og spørgsmål a i opgave 2.10.

Løsning:

Genopfriskning af 2.5:
stx mat A december 2011
Fra et rør løber forurenet vand ned i en tønde med vand. Med $C(t)$ betegnes koncentrationen (målt i ppm.) af det forurenende stof i tønden til tidspunktet t (målt i minutter).



I en model antages det, at $C(t)$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$$

Det oplyses at $C(0) = 0$.

a) Bestem en forskrift for $C(t)$.

Løst med Maple:

$$dsolve(\{C'(t) = 0.4 - 0.02 \cdot C(t), C(0) = 0\}, C(t))$$

$$C(t) = 20 - 20\, e^{-\frac{t}{50}}$$

som vi også fik, idet $\frac{t}{50} = \frac{1}{50} \cdot t = 0{,}02 \cdot t$

Genopfriskning af 2.10:

Opgave 2.10

htx, juni 2017

Billedet viser et apparat til måling af blodsukker.

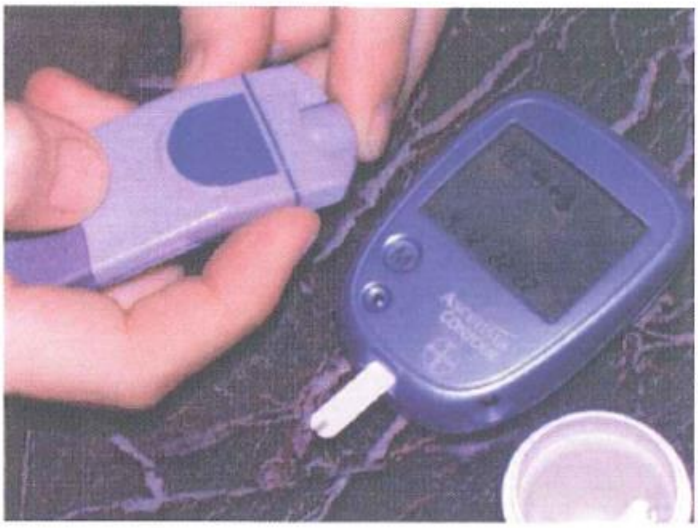


Foto: Rune Friis Lauridsen

Koncentrationen af glukose i blodet ligger normalt under 1000 mg pr. liter. Ved tilførsel af insulin kan koncentrationen af glukose i blodet sænkes. Diabetikere kan i dag få tilført insulin med et transportabelt doseringsapparat.
Koncentrationen af glukose i blodet kan ved konstant tilførsel af insulin tilnærmelsesvis beskrives ved følgende differentialligning

$$\frac{dy}{dt} = 540 - 0{,}6 \cdot y$$

hvor y angiver koncentrationen i mg pr. liter og t måles i timer.

Til tiden $t = 0$, viser en måling af diabetikerens koncentration af glukose i blodet 1500 mg pr. liter.

Løst vha. Maple:

$$dsolve(\{y'(t) = 540 - 0.6 \cdot y(t), y(0) = 1500\}, y(t))$$

$$y(t) = 900 + 600\, e^{-\frac{3t}{5}}$$

som vi også fik, idet $\frac{3}{5} = 0{,}6$

Opgave 3.1

Skriv følgende på symbolsk form, først med $\propto$, derefter på formen ... $= k \cdot$ ...

a) y er proportional med s og omvendt proportional med q^2.

b) m er proportional med såvel s som kvadratet på h og omvendt proportional med $\sqrt{z}$.
Tillægsspørgsmål til de hurtige: hvad sker der med m, når s fordobles, alt andet lige? hvad sker der med m, når h fordobles, alt andet lige? hvad sker der med m, når z gøres 4 gange så stor, alt andet lige?

3.1.a, løsning

$$y \propto s \cdot \frac{1}{q^2} \Leftrightarrow y = k \cdot \frac{s}{q^2}$$

3.1.b, løsning

$$m \propto s \cdot h^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \Leftrightarrow m = k \cdot \frac{s \cdot h^2}{\sqrt{z}}$$

Når s fordobles, fordobles m (de vokser i samme takt), når z gøres fire gange så stor bliver m halveret.

Hvis man skal gøre rede for det ved beregninger, kunne det med z fx skrives

$$m_1 = k \cdot \frac{s \cdot h^2}{\sqrt{4 \cdot z}} = k \cdot \frac{s \cdot h^2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{s \cdot h^2}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \cdot m$$

Opgave 3.2. Græskaropgaven

Vi betragter 5 modeller for væksten (hvor der fokuseres på massen/vægten) af en bestemt græskarsort. Et græskar af denne type vejer i gennemsnit 52 kg, når de er udvoksede.
Vægten/massen i kg betegnes *m* og tiden (i døgn) betegnes med *t* .

Model 1
Væksthastigheden antages proportional med den øjeblikkelige masse.

Model 2
Væksthastigheden antages proportional med tiden.

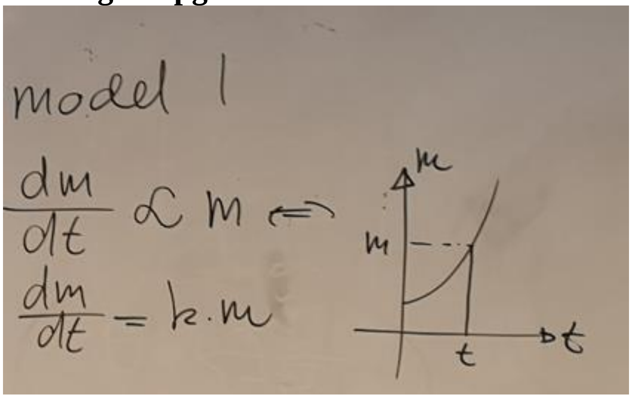
Model 3
Væksthastigheden antages proportional med såvel tiden, der er gået fra start samt den øjeblikkelige masse

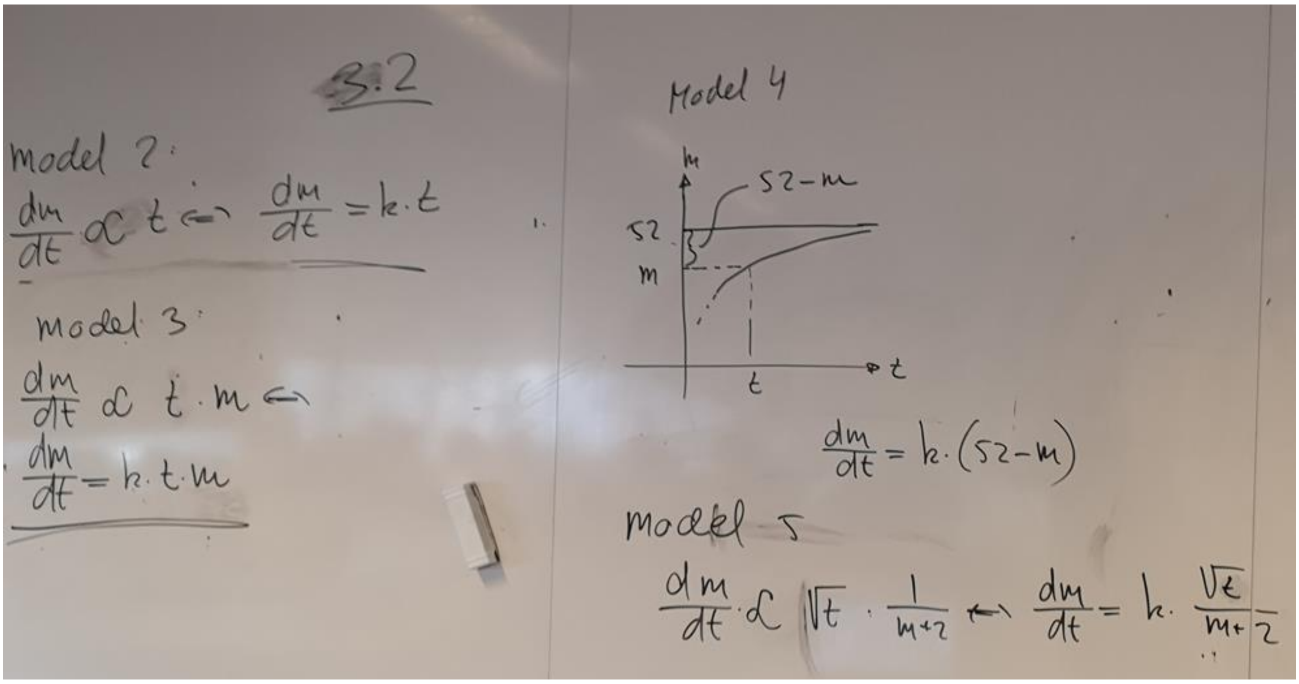
Model 4
Væksthastigheden antages proportional med hvor meget græskarret mangler i at være udvokset.

Model 5
Vækstagtigheden antages proportional med kvadratroden af t og omvendt proportional med $m + 2$

Opstil en differentialligning for hver model (altså 5 forskellige).

Løsning til opgaven fra tavlen:





Opgave 3.3

Formuler differentialligningerne i opgave 2.5 til 2.11 (2.12 er sværere og valgfri) a la:
"Hastigheden hvormed … er proportional med … og proportionalitetskonstanten er …."

Hint, du kan have glæde af til flere af opgaverne: Differentialligningen $\frac{dC}{dt} = 0{,}4 - 0{,}02 \cdot C$ fra opgave 2.5, kan omskrives til $\frac{dC}{dt} = 0{,}02 \cdot (20 - C)$. Og så er det let at se proportionalitetsforholdene.

I 2.12 kan man også omskrive differentialligningen så den kommer til at ligne den i 2.7 …

Fra 2.5:
$\frac{dC}{dt} = 0{,}02 \cdot (20 - C)$:
Hastigheden hvormed koncentrationen ændrer sig (vokser), er proportional med hvor meget den mangler i at blive 20 ppm, og proportionalitetskonstanten er 0,02 (enhed ikke medtaget)

Fra 2.6:
$v = \frac{dN}{dt} = -0{,}01 \cdot N$:
Hastigheden hvormed antallet af frøer falder, er proportional med det øjeblikkelige antal, og proportionalitetskonstanten er $-0{,}01$ (enhed ikke medtaget)

Fra 2.7:

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$$

Hastigheden hvormed antal smittede udviklede sig (voksede) i SARS-epidemien var proportional med såvel antal smittede som med hvor mange, der manglede at blive smittet ud af det maksimale antal på 209, og proportionalitetskonstanten var 0,00526 (enhed ikke medtaget).

Fra 2.8:

$$\frac{dM}{dt} = 5{,}1742 - 0{,}1584M \Leftrightarrow \frac{dM}{dt} = 0{,}1584 \cdot (32{,}665 - M)$$

Hastigheden hvormed udviklingen i det relative kulstof-13-indhold (i promille) udvikler sig, er proportionalt med hvor meget det mangler i at nå loftet på 32,665 promille, og proportionalitetskonstanten er 0,1584 (enhed ikke medtaget).

Fra 2.9:
$\frac{dT}{dt} = 0{,}005 \cdot (250 - T)$:
Hastigheden hvormed stegens temperatur vokser, er proportional med hvor meget den mangler i at nå maksimumtemperaturen på 250℃, og proportionalitetskonstanten er 0,005 (enhed ikke medtaget)

Fra 2.10:

$$\frac{dy}{dt} = 540 - 0{,}6y \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 0{,}6 \cdot (900 - y)$$

Hastigheden hvormed koncentrationen af gloukose i blodet er er proportional med hvor meget den mangler i at nå 900 mg pr. liter (den falder mod 900 fra 1500) og proportionalitetskonstanten er 0,6 (enhed ikke medtaget).

Fra 2.11

$$\frac{d[A]}{dt} = -6{,}20 \cdot 10^{-4} \cdot [A]$$

Reaktionshastigheden (hastigheden hvormed koncentrationen ændrer sig (falder)) ved sønderdeling af stoffet er proportional med den øjeblikkelige koncentration, og proportionalitetskonstanten er $-6{,}20 \cdot 10^{-4}$ min^{-1}

Fra 2.12

I løsningen siden 29, kom vi frem til

$$\frac{dI}{dt} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot I \cdot (10^6 - I)\ ,$$

og her er det let at se, at

hastigheden hvormed antal smittede udvikler sig (vokser) er proportional med såvel hvor mange der er smittet som hvor mange af loftet på 1 mio., der mangler at blive smittet, og proportionalitetskonstanten er $2 \cdot 10^{-6}$ (enhed ikke medtaget).